Лекция 6 «Дифференциальное уравнение движения Эйлера. Дифференциальные уравнения движения Навье-Стокса»

Цель: Приведите вывод дифференциального уравнения движения Эйлера. Дайте его физический смысл. Приведите вывод дифференциальных уравнений движения Навье-Стокса и его физический смысл.

Краткий конспект лекции: Дифференциальные уравнения движения Эйлера. Рассмотрим установившийся поток идеальной жидкости. Как уже говорилось, она не обладает вязкостью, т.е. движется без трения.

Как и при выводе дифференциальных уравнений равновесия Эйлера, выделим в потоке элементарный параллелепипед объемом $dV = dxdydz$, ориентированный относительно осей координат (рис. 1).

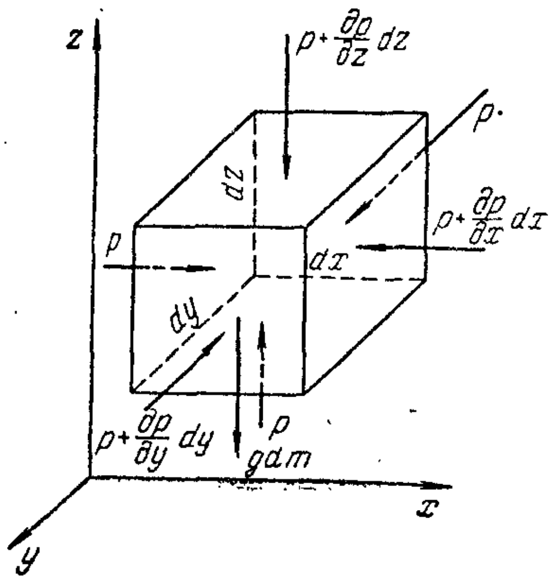

Рис. 1. К выводу дифференциальных уравнений равновесия Эйлера

Выше было показано в Лекции 3, что проекции на оси координат сил тяжести и давления, действующих на параллелепипед, составляют:

для оси x

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

для оси y

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz$$

для оси z

$$-\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)dxdydz$$

Согласно основному принципу динамики, *сумма проекций сил, действующих на движущийся элементарный объем жидкости, равна произведению массы жидкости на ее ускорение.*

Масса жидкости в объеме параллелепипеда

$$dm = \rho dxdydz$$

Если жидкость движется со скоростью w, то ее ускорение равно $\frac{dw}{d\tau}$, а проекции ускорения на оси координат: $\frac{dw_x}{d\tau}, \frac{dw_y}{d\tau}$ и $\frac{dw_z}{d\tau}$, где w_x, w_y и w_z – составляющие скорости вдоль осей x, y и z. Разумеется, при этом соответствующие производные по времени не означают изменений во времени составляющих скорости в какой-либо фиксированной точке пространства. Такие изменения $\frac{dw_x}{d\tau}, \frac{dw_y}{d\tau}$ и $\frac{dw_z}{d\tau}$ равны нулю в рассматриваемом случае установившегося потока. Производные же $\frac{dw_x}{d\tau}, \frac{dw_y}{d\tau}$ и $\frac{dw_z}{d\tau}$ отвечают изменению во времени значений w_x, w_y и w_z при перемещении частицы жидкости из одной точки пространства в другую (наблюдатель в данном случае связан с движущейся частицей потока).

В соответствии с основным принципом динамики

$$\rho dxdydz\frac{dw_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

$$\rho dxdydz\frac{dw_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz$$

$$\rho dxdydz\frac{dw_z}{d\tau} = \left(-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}\right)dxdydz$$

или после сокращения

$$\begin{cases} \rho\frac{dw_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho\frac{dw_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho\frac{dw_z}{d\tau} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

где, согласно уравнению (15а), приведенному в Лекции 5, субстанциональные производные соответствующих составляющих скорости равны

$$\begin{cases} \frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial x}w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y}w_y + \frac{\partial w_x}{\partial z}w_z \\ \frac{dw_y}{d\tau} = \frac{\partial w_y}{\partial x}w_x + \frac{\partial w_y}{\partial y}w_y + \frac{\partial w_y}{\partial z}w_z \\ \frac{dw_z}{d\tau} = \frac{\partial w_z}{\partial x}w_x + \frac{\partial w_z}{\partial y}w_y + \frac{\partial w_z}{\partial z}w_z \end{cases} \tag{2}$$

Система уравнений (1) с учетом выражений (2) представляет собой *дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера для установившегося потока*.

При неустановившемся движении скорость жидкости изменяется не только при перемещении частицы потока из одной точки пространства в другую, но и с течением времени в каждой точке. Поэтому, в соответствии с уравнением (15а, Лекция 5), составляющие ускорения в уравнении (1), выражаемые субстанциональными производными для неустановившихся условий, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \frac{\partial w_x}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_z}{\partial z} w_z \\ \frac{dw_y}{d\tau} = \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + \frac{\partial w_y}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_y}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_y}{\partial z} w_z \\ \frac{dw_z}{d\tau} = \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + \frac{\partial w_z}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_z}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_z}{\partial z} w_z \end{cases} \tag{2a}$$

Система уравнений (1) с учетом выражений (2а) представляет собой *дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера для неустановившегося потока*.

Как будет показано в Лекции 7, интегралом уравнений движения Эйлера для установившегося потока является уравнение Бернулли, широко используемое для решения многих технических задач.

Дифференциальные уравнения движения Навье-Стокса

При движении реальной (вязкой) жидкости в потоке жидкости помимо сил давления и тяжести действуют также силы трения.

Действие сил трения T на выделенный в потоке вязкой жидкости элементарный параллелепипед (рис. 2) проявляется в возникновении на его поверхности касательных напряжений τ. Рассмотрим первоначально относительно простой случай *одномерного* плоского потока *капельной* жидкости в направлении оси x, когда проекция скорости w_x зависит только от расстояния z до горизонтальной плоскости отсчета.

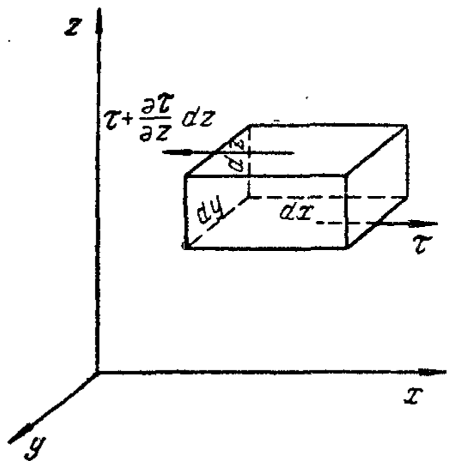

Рис. 2. К выводу уравнений Навье-Стокса

В этих условиях касательные напряжения возникают лишь на поверхностях dF верхней и нижней граней элементарного параллелепипеда, причем $dF = dxdy$. Если касательное напряжение на нижней грани параллелепипеда равно τ, то на верхней оно составляет $\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz\right)$. Производная $\frac{\partial \tau}{\partial z}$ выражает изменение касательного напряжения вдоль оси z в точках, лежащих на нижней грани параллелепипеда, а $\frac{\partial \tau}{\partial z} dz$ представляет собой изменение этого напряжения вдоль всей длины dz ребра параллелепипеда.

Указанные на рис. 2 стрелками направления сил трения, приложенных к параллелепипеду на его нижней и верхней гранях, обусловлены, например, тем, что более медленные вышележащие слои жидкости затормаживают слой, в котором находится параллелепипед, а более быстрые нижележащие слои «разгоняют» его (нормаль проводится к поверхностям соприкосновения перемещающихся относительно друг друга слоев в направлении уменьшения их скорости).

Тогда проекция равнодействующей сил трения на ось x

$$\tau dxdy - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz\right) dxdy = -\frac{\partial \tau}{\partial z} dxdydz$$

Подставив в это выражение значение касательного напряжения τ по уравнению (22, Лекция 2) [$\tau = -\mu \frac{\partial w_x}{\partial z}$, где μ – вязкость жидкости], получим

$$\mu \frac{\partial \left(\frac{\partial w_x}{\partial z}\right)}{\partial z} dxdydz = \mu \frac{\partial^2 w_x}{dz^2} dxdydz$$

В более общем случае трехмерного потока составляющая скорости w_x будет изменяться не только в направлении z, но и в направлениях всех трех осей координат. Тогда проекция равнодействующей сил трения на ось x примет вид

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{dz^2} + \frac{\partial^2 w_x}{dy^2} + \frac{\partial^2 w_x}{dx^2}\right) dxdydz$$

Сумму вторых производных по осям координат называют оператором Лапласа:

$$\frac{\partial^2 w_x}{dx^2} + \frac{\partial^2 w_x}{dy^2} + \frac{\partial^2 w_x}{dz^2} = \nabla^2 w_x$$

Следовательно, проекция равнодействующей сил может быть представлена как

$$\mu \nabla^2 w_x dxdydz$$

Соответственно проекции равнодействующей сил трения:

на ось y

$$\mu \nabla^2 w_y dxdydz$$

на ось z

$$\mu \nabla^2 w_z dxdydz$$

Проекции на оси координат равнодействующей всех сил (тяжести, давления и трения), действующих на элементарный объем капельной жидкости (с учетом проекций сил тяжести и давления, полученных при выводе уравнений Эйлера), составляют:

на ось x

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x\right) dxdydz$$

на ось y

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 w_y\right) dxdydz$$

на ось z

$$\left(-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z\right) dxdydz$$

Суммы проекций сил на оси координат, в соответствии с основным принципом динамики, должны быть равны произведению массы жидкости $\rho dxdydz$ (ρ – плотность жидкости), заключенной в элементарном объеме, на проекции ускорения на оси координат. Поэтому, приравнивая проекции равнодействующей произведениям массы на проекции ускорения, после сокращения на $dxdydz$, получим

$$\begin{cases} \rho \frac{dw_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 w_y \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z \end{cases} \quad (3)$$

где соответствующие субстанциональные производные выражены для установившегося и неустановившегося потоков уравнениями (2) или (2а).

Уравнения (3) представляют собой *уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкой капельной жидкости*.

При движении сжимаемой жидкости (газа) в ней дополнительно возникают вызванные трением силы сжатия и растяжения, поэтому уравнения Навье-Стокса принимают вид:

$$\begin{cases} \rho \frac{dw_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\nabla^2 w_x + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\nabla^2 w_y + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\nabla^2 w_z + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \end{cases} \quad (3а)$$

где частные производные $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ и $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ выражают изменения скорости по осям x, y, z, связанные с действием сил сжатия и растяжения, причем

$$\theta = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = div\, w$$

Левые части уравнений (3) выражают произведение массы единицы объема ρ на проекцию ее ускорения, т.е. представляют собой проекции равнодействующей сил инерции, возникающих в движущейся жидкости.

В правых частях тех же уравнений произведение ρg отражает влияние сил тяжести, частные производные $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ – влияние изменения гидростатического давления, а произведения вязкости на сумму вторых производных проекций скорости – влияние сил трения на движущуюся жидкость.

Каждый член уравнений (3) имеет размерность соответствующей силы (тяжести, давления, трения или инерции), отнесенной к единице объема жидкости.

При движении идеальной жидкости, когда силы трения отсутствуют, при подстановке $\mu = 0$ в уравнения (3) последние совпадают с уравнениями (1), т.е. уравнения движения Эйлера можно получить как частный случай уравнений Навье-Стокса.

Полное описание движения вязкой жидкости в его наиболее общей форме возможно путем решения уравнений Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности потока. Однако уравнения Навье-Стокса не могут быть решены в общем виде. Получены решения этой сложной системы уравнений только для некоторых частных случаев. Так, для установившегося ламинарного движения жидкости решение уравнений Навье-Стокса позволяет вывести уравнение Пуазейля, полученное выше другим способом.

В большинстве же наиболее важных для промышленной практики случаев применение уравнений Навье-Стокса становится возможным либо при ряде упрощающих допущений, либо при преобразовании этих уравнений методами теории подобия.

Вопросы для самоконтроля:

1. Приведите вывод дифференциального уравнения движения Эйлера. Дайте его физический смысл.
2. Приведите вывод дифференциальных уравнений движения Навье-Стокса и его физический смысл.

Литература

1. Лекции по курсу «Основные процессы и аппараты химической технологии»: учебно-методическое пособие / составители: Ж.Т. Ешова, Д.Н. Акбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 392 с.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1973. – 752 с.
3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчёта процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). – Санкт-Петербург: ХИМИЗДАТ, 2009. – 544 с.